Łańcuchy Markowa

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Co-funded by
the European Union

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Łańcuch Markowa jako proces stochastyczny

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, określonych w tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ i których wartości należą do przeliczalnego zbioru $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$, nazywamy *łańcuchem Markowa* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdego ciągu $x_{k_0}, x_{k_1}, \dots, x_{k_{n-1}}, x_k, x_j \in \mathcal{S}$ mamy

$$P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k_{n-1}}, \dots, X_1 = x_{k_1}, X_0 = x_{k_0})$$
$$= P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k),$$

jeśli tylko

$$P(X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k_{n-1}}, \dots, X_1 = x_{k_1}, X_0 = x_{k_0}) > 0.$$

Łańcuch Markowa jako proces stochastyczny

Definicja

Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, określonych w tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ i których wartości należą do przeliczalnego zbioru $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$, nazywamy *łańcuchem Markowa* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdego ciągu $x_{k_0}, x_{k_1}, \dots, x_{k_{n-1}}, x_k, x_j \in \mathcal{S}$ mamy

$$P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k_{n-1}}, \dots, X_1 = x_{k_1}, X_0 = x_{k_0}) \\ = P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k),$$

jeśli tylko

$$P(X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k_{n-1}}, \dots, X_1 = x_{k_1}, X_0 = x_{k_0}) > 0.$$

Jeżeli ponadto prawa strona powyższej równości nie zależy od n, to łańcuch Markowa nazywamy *jednorodnym*. Liczby ze zbioru $\mathcal{S}$ nazywamy *stanami*.

Łańcuch Markowa jako ciąg doświadczeń losowych

Definicja

Niech $\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$, $\Omega_B \subset \Omega_{\mathcal{S}}$ oraz $\Omega_B \neq \Omega_{\mathcal{S}}$. Załóżmy, że każdemu elementowi ω_j ze zbioru $\Omega_{\mathcal{S}} \setminus \Omega_B$ odpowiada doświadczenie losowe δ_j o modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Niech ponadto δ_0 będzie doświadczeniem losowym o modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_0)$. *Jednorodnym łańcuchem Markowa o* $(r+1)$ *stanach* (są nimi elementy zbioru $\Omega_{\mathcal{S}}$) nazywamy następujące wieloetapowe doświadczenie losowe δ:

Łańcuch Markowa jako ciąg doświadczeń losowych

Definicja

Niech $\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$, $\Omega_B \subset \Omega_{\mathcal{S}}$ oraz $\Omega_B \neq \Omega_{\mathcal{S}}$. Załóżmy, że każdemu elementowi ω_j ze zbioru $\Omega_{\mathcal{S}} \setminus \Omega_B$ odpowiada doświadczenie losowe δ_j o modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Niech ponadto δ_0 będzie doświadczeniem losowym o modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_0)$. *Jednorodnym łańcuchem Markowa o* $(r+1)$ *stanach* (są nimi elementy zbioru $\Omega_{\mathcal{S}}$) nazywamy następujące wieloetapowe doświadczenie losowe δ:

- najpierw (jest to etap wstępny) przeprowadzane jest doświadczenie δ_0;

Łańcuch Markowa jako ciąg doświadczeń losowych

Definicja

Niech $\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$, $\Omega_B \subset \Omega_{\mathcal{S}}$ oraz $\Omega_B \neq \Omega_{\mathcal{S}}$. Załóżmy, że każdemu elementowi ω_j ze zbioru $\Omega_{\mathcal{S}} \setminus \Omega_B$ odpowiada doświadczenie losowe δ_j o modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Niech ponadto δ_0 będzie doświadczeniem losowym o modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_0)$. *Jednorodnym łańcuchem Markowa o* $(r+1)$ *stanach* (są nimi elementy zbioru $\Omega_{\mathcal{S}}$) nazywamy następujące wieloetapowe doświadczenie losowe δ:

- najpierw (jest to etap wstępny) przeprowadzane jest doświadczenie δ_0;
- jeśli którykolwiek etap zakończy się wynikiem ze zbioru Ω_B, to doświadczenie δ się kończy;

Łańcuch Markowa jako ciąg doświadczeń losowych

Definicja

Niech $\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$, $\Omega_B \subset \Omega_{\mathcal{S}}$ oraz $\Omega_B \neq \Omega_{\mathcal{S}}$. Załóżmy, że każdemu elementowi ω_j ze zbioru $\Omega_{\mathcal{S}} \setminus \Omega_B$ odpowiada doświadczenie losowe δ_j o modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Niech ponadto δ_0 będzie doświadczeniem losowym o modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_0)$. *Jednorodnym łańcuchem Markowa o* $(r+1)$ *stanach* (są nimi elementy zbioru $\Omega_{\mathcal{S}}$) nazywamy następujące wieloetapowe doświadczenie losowe δ:

- najpierw (jest to etap wstępny) przeprowadzane jest doświadczenie δ_0;
- jeśli którykolwiek etap zakończy się wynikiem ze zbioru Ω_B, to doświadczenie δ się kończy;
- jeśli dany etap zakończy się wynikiem ω_j i $\omega_j \notin \Omega_B$, to następny etap jest doświadczeniem δ_j.

Łańcuch Markowa jako ciąg doświadczeń losowych

Elementy zbioru $\Omega_{\mathcal{S}}$ nazywamy stanami, a elementy zbioru Ω_B stanami pochłaniającymi.

Łańcuch Markowa jako ciąg doświadczeń losowych

Elementy zbioru $\Omega_{\mathcal{S}}$ nazywamy stanami, a elementy zbioru Ω_B stanami pochłaniającymi.

Prezentacją algebraiczną skończonej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), gdzie $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$, jest wektor $[p(\omega_0), p(\omega_1), p(\omega_2), \ldots, p(\omega_r)]$. Jest to wektor stochastyczny.

Prezentacja algebraiczna

Rozważmy jednorodny łańcuch Markowa o $(r+1)$ stanach. Prezentacją modelu doświadczenia δ_0 jest wektor

$$\vec{v_0} = [p_0(\omega_0), p_0(\omega_1), \ldots, p_0(\omega_r)].$$

Z uwagi na to, że δ_0 jest etapem wstępnym, wektor ten nazywamy wektorem początkowym.

Prezentacja algebraiczna

Rozważmy jednorodny łańcuch Markowa o $(r+1)$ stanach. Prezentacją modelu doświadczenia δ_0 jest wektor

$$\vec{v_0} = [p_0(\omega_0), p_0(\omega_1), \ldots, p_0(\omega_r)].$$

Z uwagi na to, że δ_0 jest etapem wstępnym, wektor ten nazywamy wektorem początkowym.

Jeżeli łańcuch Markowa w chwili n znajdzie się w stanie ω_j i $\omega_j \notin \Omega_B$, to następny etap łańcucha Markowa jest doświadczeniem δ_j o s-modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Algebraiczną prezentacją przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$, a zarazem rozkładu p_j jest wektor

$$\vec{v_j} = [p_{j0}, p_{j1}, \ldots, p_{jr}], \quad \text{gdzie } p_{jk} = p_j(\omega_k) \text{ dla } \omega_k \in \Omega_{\mathcal{S}}.$$

Jeśli $\omega_j \in \Omega_B$, to z przyjętych wcześniej umów wynika, że

$$p_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } j = k, \\ 0, & \text{gdy } j \neq k. \end{cases}$$

Jeśli $\omega_j \in \Omega_B$, to z przyjętych wcześniej umów wynika, że

$$p_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } j = k, \\ 0, & \text{gdy } j \neq k. \end{cases}$$

Przyjmujemy więc, że dla $\omega_j \in \Omega_B$ współrzędna p_{jj} wektora $\vec{v_j}$ jest równa 1, a pozostałe współrzędne są równe 0.

Ciąg wektorów $(\vec{v_0}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_r})$ można utożsamiać z macierzą stochastyczną $\mathrm{Q} = [p_{jk}]$, gdzie kolejne wyrazy j-tego wiersza tej macierzy są kolejnymi współrzędnymi wektora $\vec{v_j}$. Trójka $[\Omega_{\mathcal{S}}, \vec{v_0}, \mathrm{Q}]$ jest algebraiczną prezentacją jednorodnego łańcucha Markowa.

Ciąg wektorów $(\vec{v_0}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_r})$ można utożsamiać z macierzą stochastyczną $\mathrm{Q} = [p_{jk}]$, gdzie kolejne wyrazy j-tego wiersza tej macierzy są kolejnymi współrzędnymi wektora $\vec{v_j}$. Trójka $[\Omega_{\mathcal{S}}, \vec{v_0}, \mathrm{Q}]$ jest algebraiczną prezentacją jednorodnego łańcucha Markowa.

W dalszej części wykładu zajmujemy się jednorodnymi łańcuchami Markowa $[\Omega_{\mathcal{S}}, \vec{v_0}, \mathrm{Q}]$, w których $\vec{v_0} = [1, 0, \ldots, 0]$, a więc łańcuchami, których pierwszym etapem jest doświadczenie δ_0. Przy tej umowie trójka $[\Omega_{\mathcal{S}}, \vec{v_0}, \mathrm{Q}]$ jest jednoznacznie określona przez parę $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathrm{Q}]$.

Prezentacja ruletkowa

Rozważmy jednorodny łańcuch Markowa $[\Omega_{\mathcal{S}}, Q]$. Każdemu elementowi ω_j ze zbioru $\Omega_{\mathcal{S}} \setminus \Omega_B$ odpowiada doświadczenie losowe δ_j o modelu probabilistycznym $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Każde doświadczenie losowemu δ_j ma swoją ruletkową prezentację. Załóżmy bowiem, że doświadczeniu losowemu δ_j odpowiada ruletka R_j. Etykiety sektorów każdej z ruletek są elementami zbioru stanów $\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r\}$.

Prezentacja ruletkowa

Rozważmy jednorodny łańcuch Markowa $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathrm{Q}]$. Każdemu elementowi ω_j ze zbioru $\Omega_{\mathcal{S}} \setminus \Omega_B$ odpowiada doświadczenie losowe δ_j o modelu probabilistycznym $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Każde doświadczenie losowemu δ_j ma swoją ruletkową prezentację. Załóżmy bowiem, że doświadczeniu losowemu δ_j odpowiada ruletka R_j. Etykiety sektorów każdej z ruletek są elementami zbioru stanów $\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r\}$.

Rozważmy następujące wieloetapowe doświadczenie losowe:

- doświadczenie rozpoczyna się od losowania sektora za pomocą ruletki R_0,
- ilekroć któryś z etapów zakończy się wynikiem ω_j, gdzie $\omega_j \in \Omega_B$, doświadczenie się kończy,
- jeśli dany etap zakończy się wynikiem ω_j i $\omega_j \notin \Omega_B$, to następny etap jest losowaniem sektora za pomocą ruletki R_j.

Prezentacja ruletkowa

Rozważmy jednorodny łańcuch Markowa $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathrm{Q}]$. Każdemu elementowi ω_j ze zbioru $\Omega_{\mathcal{S}} \setminus \Omega_B$ odpowiada doświadczenie losowe δ_j o modelu probabilistycznym $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Każde doświadczenie losowemu δ_j ma swoją ruletkową prezentację. Załóżmy bowiem, że doświadczeniu losowemu δ_j odpowiada ruletka R_j. Etykiety sektorów każdej z ruletek są elementami zbioru stanów $\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r\}$.

Rozważmy następujące wieloetapowe doświadczenie losowe:

– doświadczenie rozpoczyna się od losowania sektora za pomocą ruletki R_0,
– ilekroć któryś z etapów zakończy się wynikiem ω_j, gdzie $\omega_j \in \Omega_B$, doświadczenie się kończy,
– jeśli dany etap zakończy się wynikiem ω_j i $\omega_j \notin \Omega_B$, to następny etap jest losowaniem sektora za pomocą ruletki R_j.

Opisane doświadczenie losowe nazywamy ruletkową prezentacją jednorodnego łańcucha Markowa $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathrm{Q}]$.

Niech $[\Omega_{\mathcal{S}}, Q]$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa. Elementy zbioru Ω_S interpretujemy jako punkty płaszczyzny i nazywamy je *węzłami*, a zbiór węzłów oznaczamy przez $\mathcal{S}$. Węzeł odpowiadający stanowi ω_j oznaczamy przez w_j. Wówczas $\mathcal{S} = \{w_0, w_1, \ldots, w_r\}$. Węzeł w_0 reprezentujący stan początkowy ω_0 nazywamy *węzłem startowym*. Każdy węzeł reprezentujący stan pochłaniający nazywamy *węzłem brzegowym*, a zbiór wszystkich węzłów brzegowych nazywamy *brzegiem grafu*. Jeżeli $p_{jk} > 0$, to węzeł w_j łączymy zorientowanym odcinkiem prostej lub krzywej z węzłem w_k. Ten odcinek nazywamy *łukiem*. Przyporządkowując każdemu łukowi liczbę p_{jk} dostajemy digraf ważony $[\mathcal{S}, Q]$, który nazywamy *grafem jednorodnego łańcucha Markowa* $[\Omega_{\mathcal{S}}, Q]$. Ten graf jest *ikoniczną prezentacją jednorodnego łańcucha Markowa* $[\Omega_{\mathcal{S}}, Q]$.